9/4/19

Παραδείγματα - Παρατηρήσεις

α) Το $(0,1]$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που δεν είναι κλειστό άρα δεν είναι πλήρες.
Θεωρούμε την ακολουθία υποσυνόλων (F_n) του $(0,1]$ με $F_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$

κάθε F_n είναι κλειστό στο $(0,1]$
(αφού $F_n = \underbrace{\left(-\infty, \frac{1}{n}\right]}_{\text{κλειστό στο } \mathbb{R}} \cap (0,1]$)

F_n φθίνουσα $\operatorname{diam}(F_n) = \frac{1}{n} \to 0$. Εδώ:

$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$

β) Από τις τρεις υποθέσεις για την $(F_n)_n$ δεν μπορεί καμιά να παραλειφθεί. Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική (που είναι πλήρης)
(i) Αν θέσουμε $F_n = \left[n, n + \frac{1}{n}\right]$ κάθε F_n είναι κλειστό, $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$
(η (F_n) δεν είναι φθίνουσα) $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$

(ii) Τα $F_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$ δεν είναι κλειστά στο $\mathbb{R}$
ενώ (F_n) φθίνουσα $\operatorname{diam} F_n = \frac{1}{n} \to 0$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$

(iii) Για τα σύνολα $F_n = [n, +\infty)$, (F_n) φθίνουσα, κάθε F_n είναι κλειστό ενώ $\operatorname{diam}(F_n) = +\infty \not\to 0$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$

Θεώρημα (Συστολής του Banach)
(Σταθερού σημείου του Banach)
Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to X$ μια συνάρτηση συστολής δηλ. υπάρχει $c < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \le c\rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο [δηλαδή υπάρχει μοναδικό $a \in X$ ώστε $f(a) = a$]

Απόδειξη: Μοναδικότητα: Αν a, b δύο σταθερά σημεία της f, δηλ. $f(a) = a$, $f(b) = b$ από την υπόθεση προκύπτει: $\rho(f(a), f(b)) \le c\rho(a, b) \Rightarrow$ $\Rightarrow \rho(a, b) \le c\rho(a, b)$ και άρα (εφόσον $c < 1$) προκύπτει $\rho(a, b) = 0$ άρα $\boxed{a = b}$

Ύπαρξη: Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο $x \in X$ και θεωρούμε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $x_1 = x$

$x_{n+1} = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ισχυρισμός: Η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία
Αποδ: Για κάθε $n \ge 2$ από την υπόθεση έχουμε
$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \le c\rho(x_n, x_{n-1})$
Προκύπτει επαγωγικά ότι $\rho(x_{n+1}, x_n) \le c^{n-1}(\rho(f(x), x))$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Πράγματι: $\to$ Για $n = 1$, $\rho(x_2, x_1) = \rho(f(x), x) = c^0 \rho(f(x), x) =$ $= c^{n-1} \rho(f(x), x)$

$\to$ Αν για κάποιο n: $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq c^{n-1}\rho(f(x), x)$
τότε: $\rho(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq c\rho(x_{n+1}, x_n) \leq c \cdot c^{n-1}\rho(f(x), x) = c^n \rho(f(x), x)$

Συνεπώς για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq$$
$$\leq c^{m-2}\rho(f(x), x) + c^{m-3}\rho(f(x), x) + \dots + c^{n-1}\rho(f(x), x) =$$
$$= (c^{m-2} + c^{m-3} + \dots + c^{n-1})\,\rho(f(x), x) =$$
$$= c^{n-1}(1 + c + c^2 + \dots + c^{m-n-1})\,\rho(f(x), x) \leq$$
$$\leq c^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c^k\right)\rho(f(x), x) = \frac{c^{n-1}}{1-c}\rho(f(x), x)$$

Εφόσον $c^n \to 0$ προκύπτει ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

[Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{c^{n-1}}{1-c}\rho(f(x), x) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. Τότε για κάθε $m \geq n \geq n_0$ έχουμε $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$]

Εφόσον ο (X, ρ) είναι πλήρης υπάρχει $a \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} a$. Εφόσον η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz είναι συνεχής. Άρα από την αρχή μεταφοράς προκύπτει $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$ δηλ. $x_{n+1} \xrightarrow{\rho} f(a)$

$x_n \xrightarrow{\rho} a \Rightarrow x_{n+1} \xrightarrow{\rho} a$. Από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας προκύπτει $f(a) = a$

Παρατηρήσεις α) Στην παραπάνω απόδειξη δεν παίζει ρόλο το αρχικό σημείο x που επιλέχθηκε, ήταν τυχαία η επιλογή.

β) Από την παραπάνω απόδειξη έχουμε:
$\rho(x_m, x_n) \leq \frac{c^{n-1}}{c} \rho(f(x), x)$ για $m > n$

Κρατώντας σταθερό το n και παίρνωντας όριο για $m \to \infty$ προκύπτει:
$\rho(a, x_n) \leq \frac{c^{n-1}}{1-c} \rho(f(x), x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

γ) Αν αντί για $\rho(f(x), f(y)) \leq c\rho(x,y)$ $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ όπου $c < 1$ είχαμε την υπόθεση $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x,y)$ τότε: $\to$ Υπάρχει το πολύ ένα σταθερό σημείο
Αποδ: όπως πριν
$\to$ Ενδέχεται η f να μην έχει κανένα σταθερό σημείο.

(π.χ.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \log(1+e^x)$ τότε:
$|f(x) - f(y)| < |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \neq y$, ενώ η f δεν έχει κανένα σταθερό σημείο.
Αν $x < y$ τότε $\exists \xi \in (x,y) \subseteq \mathbb{R}$ ώστε:
$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ όμως $f'(\xi) = \frac{e^t}{1+e^t} \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < f'(t) < 1$ Άρα $|f(x) - f(y)| < |x-y|$

δ) Η υπόθεση της πληρότητας δε μπορεί να παραλειφθεί στο παραπάνω θεώρημα.
(π.χ.) $f: (0,1) \to (0,1)$ $f(x) = x/2$ τότε: $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$
$\forall x, y \in (0,1)$ ενώ η f δεν έχει σταθερό σημείο
(εδώ ο $(0,1)$ δεν είναι πλήρης)

Θεώρημα (Baire): Αν (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό

Σκιαγράφηση της απόδειξης: Για να δ.ο. ένα σύνολο είναι πυκνό αρκεί να δείξουμε ότι τέμνει κάθε ανοικτό μη κενό σύνολο.
Έστω $U\neq\emptyset$ ένα ανοικτό σύνολο. Θα δείξουμε ότι $U\cap(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)\neq\emptyset$. Εφόσον το G_1 είναι πυκνό και το U ανοικτό μη κενό έχουμε:
$G_1\cap U\neq\emptyset$ έστω $x_1\in G_1\cap U$, τότε $\exists\ \varepsilon_1>0$ ώστε: $\boxed{\hat{B}_\rho(x_1,\varepsilon_1)\subseteq G_1\cap U}$ Εφόσον το G_2 είναι πυκνό και $B_\rho(x_1,\varepsilon_1)$ είναι ανοικτό μη κενό. Ισχύει: $B_\rho(x_1,\varepsilon_1)\cap G_2\neq 0$.
Έστω $x_2\in \underbrace{B_\rho(x_1,\varepsilon_1)\cap G_2}_{\text{ανοικτό}}$ και επιλέγουμε ε_2 με $0<\varepsilon_2<\frac{\varepsilon_1}{2}$
ώστε: $\hat{B}_\rho(x_2,\varepsilon_2)\subseteq B_\rho(x_1,\varepsilon_1)\cap G_2$. Τότε:
$\hat{B}_\rho(x_2,\varepsilon_2)\subseteq\hat{B}_\rho(x_1,\varepsilon_1)$ και $\hat{B}_\rho(x_2,\varepsilon_2)\subseteq G_1\cap G_2\cap U$
$\varepsilon_2<\varepsilon_1/2$
Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο (επαγωγικά) βρίσκουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X και $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών.
και a) $0<\varepsilon_{n+1}<\varepsilon_n/2$
b) $\hat{B}_\rho(x_1,\varepsilon_1)\supseteq\hat{B}_\rho(x_2,\varepsilon_2)\supseteq\dots\supseteq\hat{B}_\rho(x_n,\varepsilon_n)\supseteq\hat{B}_\rho(x_{n+1},\varepsilon_{n+1})$
γ) $\hat{B}_\rho(x_n,\varepsilon_n)\subseteq G_1\cap\dots\cap G_n\cap U$

Εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης μ.χ. και η $(\hat{B}_\rho(x_n,\varepsilon_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(\hat{B}_\rho(x_n,\varepsilon_n)) \leq 2\varepsilon_n \to 0$. Από το Θεώρημα Cantor $\exists\, x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}_\rho(x_n,\varepsilon_n)$ Τότε:

$x \in (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \cap U$ άρα: $(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \cap U \neq \emptyset$